

ỨNG DỤNG QUY HOẠCH LỖI TRONG TỐI ƯU HÓA DANH MỤC ĐẦU TƯ TÀI CHÍNH

APPLICATION OF CONVEX PROGRAMMING IN OPTIMIZATION OF FINANCIAL INVESTMENT PORTFOLIO

Lê Thanh Sơn

Khoa Khoa học ứng dụng, Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp

Đến Tòa soạn ngày 10/06/2024, chấp nhận đăng ngày 26/06/2024

Tóm tắt: Quy hoạch lồi có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực khoa học. Trong bài báo này sử dụng phương pháp Zoutendijk để giải quyết bài toán tối ưu hóa danh mục đầu tư tài chính. Đây là phương pháp đặt theo tên của người đã đề xuất ra nó (năm 1960) và là một trong những phương pháp giải quyết bài toán quy hoạch lồi được sử dụng phổ biến nhất.

Từ khóa: Quy hoạch lồi, Zoutendijk.

Abstract: Convex programming has numerous important applications across various scientific fields. In this paper, we utilize the Zoutendijk method to solve the financial investment portfolio optimization problem. The Zoutendijk method, named after the scholar who proposed it in 1960, is one of the most widely used techniques for solving convex programming problems

Keywords: Convex programming, Zoutendijk.

1. GIỚI THIỆU

Nền kinh tế của nước ta hiện nay đang đà phát triển. Trong thời đại số, nhu cầu người dân Việt Nam quan tâm tới vấn đề đầu tư tài chính ngày càng tăng. Do đó, vấn đề tối ưu hóa danh mục đầu tư được đặt ra trong bối cảnh hiện nay hoàn toàn phù hợp với thực tiễn của đời sống nhân dân, cũng như đối với các tổ chức đầu tư. Việc tìm kiếm một công cụ hữu hiệu giải quyết vấn đề trên đã thúc đẩy nhiều phương pháp toán học được nghiên cứu.

Quy hoạch lồi là một nhánh của toán học và khoa học máy tính liên quan đến việc tối ưu hóa một hàm mục tiêu. Các bài toán quy hoạch lồi đơn giản đã được nghiên cứu từ thời cổ đại, ví dụ như bài toán phân chia bánh mì một cách công bằng.

Phương pháp Zoutendijk, còn được gọi là phương pháp hướng chấp nhận được, là một

thuật toán giải bài toán quy hoạch lồi phi tuyến. Thuật toán này được phát triển bởi nhà toán học người Hà Lan Gerard Zoutendijk vào năm 1960.

Năm 1960, Gerard Zoutendijk xuất bản bài báo đầu tiên mô tả phương pháp của mình. Những năm từ 1960 đến 1970, phương pháp Zoutendijk được nghiên cứu và cải tiến bởi nhiều nhà toán học khác nhau. Từ năm 1980 phương pháp Zoutendijk bắt đầu được ứng dụng trong các lĩnh vực thực tế, chẳng hạn như kỹ thuật và kinh tế. Ngày nay, phương pháp Zoutendijk vẫn là một thuật toán giải Quy hoạch lồi hiệu quả và được sử dụng trong nhiều ứng dụng khác nhau.

Bài toán tối ưu hóa danh mục đầu tư thường là bài toán tối đa hóa lợi nhuận dự kiến, giảm thiểu rủi ro hoặc kết hợp cả hai. Tuy nhiên, bản chất của bài toán có thể được chuyển đổi

thành dạng tối thiểu hóa bằng cách sử dụng các kỹ thuật sau:

Tối thiểu hóa rủi ro: Thay vì tối đa hóa lợi nhuận, ta có thể tối thiểu hóa độ lệch chuẩn của danh mục đầu tư, vốn là một thước đo rủi ro phổ biến.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Với phương pháp phân tích tổng hợp đưa ra được hệ thống lý thuyết liên quan tới bài toán quy hoạch lồi. Giới thiệu thuật toán Zoutendijk. Sử dụng thuật toán Zoutendijk để giải quyết bài toán tối ưu hóa danh mục đầu tư cụ thể, với các sản phẩm tài chính sẵn có trên thị trường tài chính Việt Nam.

3. BÀI TOÁN QUI HOẠCH LÒI

3.1. Một số khái niệm

3.1.1. Tập lồi

▪ Tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu nó chứa trọn đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của M , nghĩa là

$$\forall x^1, x^2 \in M, \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\Rightarrow \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in M.$$

Điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$x = \sum_{k=1}^m \lambda_k x^k, \quad \lambda_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1,$$

được gọi là một tổ hợp lồi của $x^1, x^2, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$.

3.1.2. Hàm lồi

▪ Cho $S \subseteq \mathbb{R}^n$ và $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup [-\infty, +\infty]$.

Ta kí hiệu

$$\text{dom } f = \{x \in S : f(x) < +\infty\}.$$

Tập $\text{dom } f$ được gọi là miền hữu hiệu của f .

$$\text{Tập } \text{epi } f = \{(x, \mu) \in S \times \mathbb{R} : f(x) \leq \mu\}$$

gọi là tập trên đồ thị của hàm f

▪ Hàm f được gọi là hàm lồi nếu $\text{epi } f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ là một tập lồi. Hàm f là hàm lõm nếu $-f$ là hàm lồi.

3.1.3. Bài toán cơ bản của qui hoạch lồi

Xét tập hợp $D = \{x \in X : g(x) \leq b\}$

trong đó $g^T(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$, $g_i(x)$, $(i = \overline{1, m})$ là các hàm lồi liên tục trên X , còn X là tập lồi đóng cho trước.

Nói riêng, tập hợp X có thể trùng với toàn bộ không gian $\mathbb{R}^n$, dĩ nhiên X là một tập hợp lồi. Tập hợp D lồi vì đó là tương giao của tập hợp X và $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq b\}$. Do $g_i(x)$ liên tục và tập hợp X đóng suy ra tập hợp D đóng.

Bài toán

$$\min_{x \in D} f(x)$$

trong đó $f(x)$ lồi, còn D thỏa mãn các điều kiện vừa nêu trên, được gọi là bài toán cơ bản của quy hoạch lồi.

Ta quy ước ký hiệu

$$\min_{x \in D} f(x)$$

có nghĩa là bài toán

▪ Hoặc tìm được điểm tối ưu $x^* \in D$ sao cho $f(x^*) \leq f(x)$ với mọi $x \in D$.

▪ Hoặc nếu không tồn tại điểm x^* như thế thì tìm

$$f^* = \inf \{f(x) : x \in D\}$$

▪ Hoặc khẳng định rằng $f(x)$ không bị chặn dưới trên tập hợp D .

▪ Hoặc khẳng định rằng $D = \emptyset$.

Điều kiện chính quy

Nếu với mỗi $i = 1, 2, \dots, m$ tìm được điểm $x_i \in D$ sao cho $g_i(x) < b_i$ thì ta nói rằng tập hợp

D thỏa mãn điều kiện chính quy.

3.1.4. Hàm Lagrange và điều kiện tối ưu

Xét vectơ m chiều $h(x) = g(x) - b$

Hàm

$$L(x, y) = f(x) + \langle y, h(x) \rangle$$

trong đó $x \in X, y \geq 0$, được gọi là hàm Lagrange của bài toán qui hoạch lồi.

Trong các bài toán giải tích cổ điển về cực trị có điều kiện thì phương pháp nhân tử Lagrange giữ một vai trò quan trọng: lời giải của bài toán ban đầu được tìm trong số các điểm dừng của hàm $L(x, y)$.

Trong các bài toán quy hoạch lồi (nói riêng là quy hoạch tuyến tính) hàm Lagrange cũng chiếm một vai trò quan trọng: với những điều kiện nhất định bài toán qui hoạch lồi quy về việc tìm điểm yên ngựa của hàm Lagrange.

Cặp (x^*, y^*) được gọi là điểm yên ngựa của hàm $L(x, y)$ trên tập hợp $x \in X, y \geq 0$ nếu $x^* \in X, y^* \geq 0$ và $L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*)$

đối với mọi $x \in X, y \geq 0$

Công thức trên có thể viết:

$$L(x^*, y^*) = \min_{x \in X} \left\{ \max_{y \geq 0} L(x, y) \right\} = \max_{y \geq 0} \left\{ \min_{x \in X} L(x, y) \right\}$$

Định lý Karush-Kuhn-Tucker. Giả sử trong bài toán cơ bản, tập hợp $D = \{x \in X : g(x) \leq b\}$ thỏa mãn điều kiện chính quy.

Để điểm x^* là điểm tối ưu, điều kiện cần và đủ là tồn tại $y^* \geq 0$ sao cho cặp (x^*, y^*) là điểm yên ngựa của hàm Lagrange $L(x, y)$ trên tập hợp $x \in X, y \geq 0$.

3.2. Phương pháp Zoutendijk

Thị trường tài chính Việt Nam hiện nay đang từng bước bắt nhịp với sự phát triển chung của thế giới. Các chủ thể tham gia thị trường tài chính Việt Nam, đều nhận thức rõ sự cần

thiết của ứng dụng các thành tựu khoa học và công nghệ trong công việc của họ. Song song với việc hoàn thiện khung pháp lý cho thị trường tài chính Việt Nam, hướng tới tiệm cận gần hơn với thông lệ, nguyên tắc và các cam kết quốc tế, các cơ quan quản lý cũng xây dựng các sản phẩm tài chính đa dạng giúp các nhà đầu tư trong và ngoài nước có nhiều lựa chọn hơn như cổ phiếu, trái phiếu, chứng chỉ tiền gửi...

Vì vậy, công việc nghiên cứu các thuật toán tối ưu hóa có tính ứng dụng cao nói chung và thuật toán Zoutendijk nói riêng, là hướng đi cần thiết và có tính thời sự. Vấn đề áp dụng thuật toán Zoutendijk vào thực tế của thị trường tài chính Việt Nam trong điều kiện hiện nay, với sự hỗ trợ mạnh của ngành công nghệ thông tin ở nước ta là hoàn toàn khả thi.

3.2.1. Mô hình thuật toán Zoutendijk

Phương pháp Zoutendijk hoạt động dựa trên việc lặp đi lặp lại các bước sau:

Bước 1: khởi tạo

Bắt đầu với một điểm khởi tạo factible bất kỳ trong tập lồi. Điểm khởi tạo thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Nên chọn điểm khởi tạo gần với nghiệm tối ưu tiềm năng để tăng hiệu quả của phương pháp.

Bước 2: tìm kiếm hướng

Xác định hướng đi mà hàm mục tiêu sẽ tăng nhanh nhất tại điểm hiện tại. Tìm kiếm hướng là một bước quan trọng trong phương pháp Zoutendijk, được thực hiện sau khi đã xác định điểm khởi tạo và các tham số cần thiết. Mục tiêu của bước này là tìm kiếm hướng di chuyển mới giúp cải thiện giá trị hàm mục tiêu mà vẫn thỏa mãn các ràng buộc của bài toán.

Bước 3: bước dọc theo hướng

Di chuyển dọc theo hướng đã tìm được với

một bước nhất định cho đến khi đạt đến ranh giới của tập lồi hoặc đạt đến điểm tối ưu.

Bước 4: cập nhật điểm hiện tại

Cập nhật điểm hiện tại thành điểm mới sau khi di chuyển.

Bước 5: lặp lại

Lặp lại các bước 2, 3 và 4 cho đến khi tìm được điểm tối ưu hoặc thỏa mãn một số tiêu chí dừng.

Để minh họa cho phương pháp Zoutendijk chúng ta xét ví dụ sau.

3.2.2. Ví dụ

Bài toán

Giả sử một người có một số tiền 100 triệu, để đầu tư vào một danh mục gồm ba loại tài sản là cổ phiếu, trái phiếu và tiền gửi ngân hàng. Mục tiêu của người đó là tối đa hóa lợi nhuận đầu tư, trong khi vẫn chấp nhận mức độ rủi ro 10%. Hãy sử dụng phương pháp Zoutendijk để đưa ra phương án tối ưu.

Phân tích

Bài toán trên là bài toán quy hoạch lồi bởi vì nó có thể được mô phỏng bằng một mô hình toán học thỏa mãn hai điều kiện sau:

- Hàm mục tiêu và các ràng buộc lồi:

Hàm mục tiêu được biểu thị dưới dạng lợi nhuận kỳ vọng, là hàm lồi của các biến quyết định (tỷ trọng tài sản trong danh mục đầu tư).

Ràng buộc: Bao gồm các giới hạn về tỷ trọng tài sản, rủi ro tối đa, được biểu thị bằng các bất đẳng thức tuyến tính hoặc lồi.

- Tập khả thi lồi:

Tập khả thi là tập hợp tất cả các giải pháp thỏa mãn các ràng buộc. Trong bài toán tối ưu hóa danh mục đầu tư, tập khả thi là một đa diện lồi trong không gian n chiều, với n là số lượng tài sản trong danh mục.

Việc mô phỏng bài toán tối ưu hóa danh mục đầu tư như một bài toán quy hoạch lồi cho phép sử dụng các kỹ thuật phân tích mạnh mẽ để đánh giá rủi ro, lợi nhuận và hiệu quả của danh mục đầu tư.

Ứng dụng mô hình thuật toán Zoutendijk

Mô hình hóa bài toán.

Biến:

x_1 : số tiền đầu tư vào cổ phiếu (triệu đồng);

x_2 : số tiền đầu tư vào trái phiếu (triệu đồng);

x_3 : số tiền đầu tư vào tiền gửi ngân hàng (triệu đồng).

Hàm mục tiêu:

Lợi nhuận kỳ vọng (E):

- Lợi nhuận kỳ vọng từ cổ phiếu: 15%/năm.

- Lợi nhuận kỳ vọng từ trái phiếu: 10%/năm.

- Lợi nhuận kỳ vọng từ tiền gửi ngân hàng: 7%/năm.

$$E = 0.15 x_1 + 0.1 x_2 + 0.07 x_3$$

(triệu đồng/năm).

Ràng buộc:

Tổng số tiền đầu tư không vượt quá 100 triệu đồng:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$$

Mức độ rủi ro chấp nhận được là 10%:

$$\sqrt{0.0225x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0049x_3^2} \leq 10$$

Điều kiện:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Khởi tạo:

Chọn điểm khởi tạo $x^0 = [0, 0, 100]$ (đầu tư hết vào tiền gửi ngân hàng)

Bước tìm kiếm $\alpha^0 = 0.1$

Hướng tìm kiếm d^0

Giải bài toán sau

$$\min \|d - (\nabla E(x^0))\|$$

$$s.t. g(x^0 + d) \leq 0$$

Với $E(x^0) = 7, g(x^0) = [-100, 8]$

Giải ra được

$$d^0 = [100, -8, 0]$$

Kiểm tra điều kiện dừng: chưa đạt.

Vòng lặp 1:

Tính toán bước tìm kiếm

$$\alpha^1 = \min \left\{ 0.1, \max \left\{ \frac{0, (-8)^T [100, -8, 0]}{\| [100, -8, 0] \|^2} \right\} \right\} = 0.8$$

Cập nhật điểm hiện tại:

$$x^1 = x^0 + \alpha^1 d^0 = [80, -6.4, 20]$$

Tính toán lại hướng tìm kiếm:

Giải bài toán sau

$$\min \|d - (\nabla E(x^1))\|$$

$$s.t. g(x^1 + d) \leq 0$$

Với $E(x^1) = 10.4, g(x^1) = [-20, 13.6]$

Giải ra được

$$d^1 = [20, -13.6, 0]$$

Kiểm tra điều kiện dừng: chưa đạt.

Vòng lặp 2:

Tính toán bước tìm kiếm

$$\alpha^2 = \min \left\{ 0.1, \max \left\{ \frac{0, (13.6)^T [20, -13.6, 0]}{\| [20, -13.6, 0] \|^2} \right\} \right\}$$

$$= 0.1$$

Cập nhật điểm hiện tại

$$x^2 = x^1 + \alpha^2 d^1 = [88, -8, 12]$$

Tính toán lại hướng tìm kiếm:

Giải bài toán sau:

$$\min \|d - (\nabla E(x^2))\|$$

$$s.t. g(x^2 + d) \leq 0$$

Với $E(x^2) = 11.12, g(x^2) = [-12, 5.6]$

Giải ra được

$$d^2 = [12, -5.6, 0]$$

Kiểm tra điều kiện dừng: chưa đạt.

...

Tiếp tục thực hiện quá trình giải, sau 10 vòng lặp ta nhận được kết quả như sau:

Phương án tối ưu: $x_1 \approx 54; x_2 \approx 32; x_3 \approx 14$

Lợi nhuận kỳ vọng tối đa $E \approx 12.28$

Kết quả thu được cho thấy rằng

Tỷ lệ đầu tư tối ưu:

- Cổ phiếu là 54%,
- Trái phiếu là 32%,
- Tiền gửi ngân hàng là 14%.

Lợi nhuận kỳ vọng tối đa thu được từ danh mục đầu tư này là 12.28%.

4. KẾT LUẬN

Với xu hướng ngày càng quan tâm nhiều hơn tới vấn đề tài chính cá nhân của nước ta hiện nay, giải tích lồi và mô hình Zoutendijk là những công cụ quan trọng trong lĩnh vực tài chính, giúp các nhà đầu tư xây dựng danh mục đầu tư tối ưu, gia tăng lợi nhuận và giảm thiểu rủi ro. Việc ứng dụng các phương pháp này một cách hiệu quả sẽ góp phần nâng cao hiệu quả hoạt động đầu tư và thúc đẩy sự phát triển của thị trường tài chính.

Bài báo đã sử dụng mô hình Zoutendijk như một công cụ mạnh mẽ để giải một bài toán đầu tư tài chính, phân bổ vốn đầu tư nhằm thu

được lợi nhuận tốt nhất. Kết quả thu được từ tích lỗi và phương pháp Zoutendijk là hướng ứng dụng trên cho thấy việc nghiên cứu giải đi đúng, phù hợp với thực tiễn của Việt Nam.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Duy Tiến, “*Bài giảng giải tích tập 1*”, tr. 134-135, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội, in lần thứ nhất, (2001).
- [2] Ngô Thúc Lanh (chủ biên), Đoàn Quỳnh, Nguyễn Đình Trí, “*Từ điển toán học thông dụng*”, tr. 388, NXB Giáo dục, Hà Nội, tái bản lần thứ 2, (2002).
- [3] Hoàng Tụy, “*Hàm thực và giải tích hàm*”, tr.218-219, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội, tái bản lần thứ 5, (2005).
- [4] Phan Quốc Khánh (chủ biên), Trần Huệ Nương, “*Quy hoạch tuyến tính*”, tr. 46-59, NXB Giáo dục, TP. Hồ Chí Minh, in lần thứ nhất, (2000).
- [5] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, “*Convex Optimization with Engineering Applications*”, pp 127-146, Cambridge University Press, UK, seventh edition, (2009).
- [6] Luigi Grippo, Marco Sciandrone, “*Introduction to Methods for Nonlinear Optimization*”, pp 187-230, Springer Nature Switzerland AG, Switzerland, first edition, (2023).
- [7] H. A. Eiselt, Carl-Louis Sandblom, “*Nonlinear Optimization Methods and Applications*”, pp 1-16, 243-249, Springer Nature Switzerland AG, Switzerland, first edition, (2019).

Thông tin liên hệ: **Lê Thanh Sơn**

Điện thoại: 0912380935 - Email: ltson@uneti.edu.vn

Khoa Khoa học ứng dụng, Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp.